Chapitre 6

Débat et élimination faible de tête

Dans cette partie, nous considérons le calcul utilisé par Coquand dans [9] pour définir une alternative en terme de jeux à l'élimination des coupures. C'est un calcul des séquents classique avec formules alternativement conjonctives et disjonctives construites sur des atomes décidables. Il n'y a ni variables propositionnelles, ni implication explicite. En revanche, les conjonctions et disjonctions autorisent un nombre infini de prémisses, de telle sorte que le fragment *clos* d'une logique comme l'ω-logique y apparaît comme fragment.

Les preuves sans coupures (et sans redondances, cf définition dans le corps du chapitre) seront simplement interprétées par des stratégies gagnantes pour certains jeux à deux joueurs. L'*interaction* entre deux telles stratégies gagnantes définit un *débat*. Ce débat constitue une approche "dynamique" de l'élimination d'une coupure entre deux preuves sans coupure. Prouvé terminant par Coquand, le procédé d'interaction est comparé à l'approche habituelle d'élimination des coupures. On montre que les étapes successives d'évolution du débat correspondent exactement aux étapes successives du procédé habituel d'élimination des coupures, mais en suivant une stratégie de réduction bien précise, que, par analogie avec ce qui se passe dans le λ-calcul, on peut appeler réduction faible de tête.

6.1 Les règles infinitaires

6.1.1 L'utilisation implicite d'une règle infinitaire chez Gentzen

Sous le nom d'énonçabilité d'une règle de réduction, Gentzen [21] utilise implicitement dans sa première démonstration de cohérence de l'arithmétique, une notion de prouvabilité basée sur une règle d'introduction de la quantification universelle ayant une infinité de prémisses (ω-règle).

Considérons pour simplifier le cas de formules prénexes closes et le cas de séquents monolatères, i.e. avec des formules uniquement sur la droite du symbole $\vdash$ (ce symbole pouvant alors être omis). La notion d'"énonçabilité d'une règle de réduction" s'applique aux séquents ayant au plus une formule quantifiée universellement.

- Un séquent de la forme $\Gamma, \forall x.P(x)$ avec Γ ne contenant que des formules existentielles est réductible : une étape élémentaire de réduction consiste à choisir arbitrairement un entier n et à remplacer la formule $\forall x.P(x)$ par $P(n)$ dans le séquent.
- Un séquent Γ composé uniquement de formules existentielles est réductible : une étape élémentaire de réduction consiste à choisir une des formules $\exists x.P(x)$ du séquent ainsi qu'un n et à ajouter la formule $P(n)$ au séquent.

Une règle de réduction pour un séquent est une méthode qui, quelques soient les n choisis arbitrairement comme instances des formules $\forall x.P(x)$, dit comment choisir un n adéquat pour les formules $\exists x.P(x)$ de telle sorte qu'au bout d'un temps fini, on obtienne un séquent dont une des formules est une proposition décidable vraie.

Autrement dit, la notion d'énonçabilité d'une règle de réduction revient à la notion suivante de prouvabilité (Γ ne contient que des formules existentielles) :

- si la proposition P est vraie alors Γ, P est prouvable
- si $\Gamma, \exists x.P(x), P(n)$ est prouvable pour un certain n alors $\Gamma, \exists x.P(x)$ est prouvable
- si, pour tout n, $\Gamma, P(n)$, est prouvable alors $\Gamma, \forall x.P(x)$ est prouvable

Toute formule prouvable de l'arithmétique est prouvable en ce dernier sens, mais, en contraste avec l'arithmétique où l'utilisation de l'axiome d'induction casse la propriété de la sous-formule, pour cette autre définition de la prouvabilité en arithmétique, la propriété de la sous-formule, de laquelle découle la cohérence, est préservée.

C'est cette notion de prouvabilité que nous considérons ci-après. Comme suggéré par la notion de "règle de réduction", cette définition de la prouvabilité se prête particulièrement bien à une approche calculatoire en termes de coups instanciant les variables quantifiées.

Remarque : Quoique non explicité par Gentzen, il est direct de montrer, à l'aide de cette définition de séquent prouvable sans coupure avec règle d'introduction du $\forall$ infinitaire, que les énoncés Σ^0_1 classiquement prouvables sont aussi intuitionnistiquement prouvables.

6.1.2 Le calcul de Novikoff

Il est remarquable de voir chez Novikoff, en 1941, la définition explicite d'un calcul propositionnel infinitaire (de type hilbertien) dont les formules A prouvables vérifient une propriété de "régularité" similaire à celle "d'énonçabilité d'une règle de réduction" pour le séquent $\vdash A$ chez Gentzen. Par un argument du même ordre que celui de Gentzen, Novikoff montre la cohérence de l'arithmétique mais aussi explicitement que les énoncés Σ_1^0 classiquement prouvables sont intuitionnistiquement prouvables.

La notion de régularité diffère de la notion d'énonçabilité d'une règle de réduction en ce léger point : une fois qu'un certain n a été choisi comme instance d'une formule $\exists x.P(x)$ il ne peut plus être choisi une nouvelle fois dans la même formule.

En plus de la notion de prouvabilité implicitement considérée par Gentzen, nous considèrerons aussi la notion de prouvabilité implicite à la notion de "régularité" de Novikoff. Nous montrerons en plus en quoi la restriction supplémentaire imposée par Novikoff ne fait rien perdre à la prouvabilité.

6.1.3 Règles infinitaires chez Lorenzen

Du côté occidental, selon Schütte, c'est chez Lorenzen [36] en 1951, qu'on rencontre la première utilisation explicite d'une règle avec une infinité de prémisses. L'idée est la même et le but est le même que chez Gentzen : prouver un théorème d'existence de preuves normales duquel s'ensuit la cohérence du système considéré. Dans le cas de Lorenzen, c'est d'un sous-système de la théorie des types de Russell qu'il s'agit.

6.1.4 Formules et boréliens

A noter aussi une analogie faite par Martin-Löf [41] entre formules construites à partir de conjonctions et disjonctions infinies et boréliens, analogie qui permet de prouver constructivement la transitivité de l'inclusion entre boréliens à l'aide de l'élimination des coupures.

6.2 Une variante du calcul infinitaire de Gentzen

Nous reprenons le calcul implicite à la notion d'énonçabilité d'une règle de réduction, le généralisant au cas d'une logique propositionnelle infinitaire sans variables propositionnelles, les atomes se limitant aux propositions "vrai" et "faux". On y ajoute aussi une règle de coupure explicite.

Nous introduisons une notion de "redondance" signifiant qu'un même n est joué plusieurs fois dans une formule disjonctive. Le sous-calcul sans coupure et sans "redondances" du premier calcul que nous décrivons correspondra au calcul implicite à la notion de régularité de Novikoff.

6.2.1 Formules et séquents

Les formules sont des arbres bien-fondés à branchement alternativement disjonctif et conjonctif. Aux feuilles, on trouve soit la formule vraie **1** soit la formule fausse **0**.

- si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de formules conjonctives alors $\vee_{i\in I}A_i$ est une **formule disjonctive**
- si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de formules disjonctives, alors $\wedge_{i\in I}A_i$ est une **formule conjonctive**

On définit la formule vraie **1** comme étant la famille vide de formule disjonctive et la formule fausse **0** comme étant la famille vide de formule conjonctive. Ainsi **1** est conjonctive et **0** est disjonctive.

Remarque : On peut, a priori, choisir des ensembles d'indexation quelconques. Dans la pratique, par exemple lorsqu'on interprète les formules du calcul des prédicats ou celles de l'arithmétique, les ensembles d'indexation sont des ensembles d'entiers.

La **formule duale** de A, notée $A^\perp$ est inductivement définie par :

- $(\vee_{i\in I}A_i)^\perp = \wedge_{i\in I}A_i^\perp$

- $(\wedge_{i\in I} A_i)^\perp = \vee_{i\in I} A_i^\perp$

En particulier, on a $\mathbf{1}^\perp = \mathbf{0}$ et $\mathbf{0}^\perp = \mathbf{1}$

La notion d'occurrence d'un sous-arbres et d'adresse de cette occurrence est une notion standard pour les arbres. Ici, une adresse dans une formule définit une sous-formule de cette formule. Nous utilisons les lettres u, v, w, ... pour noter les adresses de formules.

- $<>$ est l'**adresse** de A en tant que sous-formule d'elle-même
- si u est l'adresse d'une occurrence de la sous-formule $\vee_{i\in I} A_i$ de A alors ui est une **adresse** de la sous-formule A_i de A
- si u est l'adresse d'une occurrence de la sous-formule $\wedge_{i\in I} A_i$ de A alors ui est une **adresse** de la sous-formule A_i de A

Si v a la forme $ui_1...i_n$ alors v est une **extension** de u. Si v a la forme ui alors v est appelée **extension directe** de u.

Nous considérons un ensemble infini $\mathcal{N}$ appelé **ensemble des noms**. Nous considérons aussi une fonction $\mathcal{F}$ qui associe à chaque sous-ensemble X de $\mathcal{N}$ un nom x qui n'est pas dans X. Une **fonction de renommage** σ est une bijection d'un ensemble $X \subset \mathcal{N}$ vers un autre ensemble $Y \subset \mathcal{N}$. La fonction de renommage de domaine vide est notée $\{\}$. L'adjonction d'un élément et son image à une fonction de renommage est notée sous la forme $\sigma \cup \{t \to t'\}$

Un **séquent** est relativisé à une formule A donnée. Un séquent est un ensemble fini d'adresses d'occurrences de sous-formules disjonctives, chacune indexée par un nom de $\mathcal{N}$, avec, en plus, éventuellement l'adresse — non nommée — d'une occurrence d'une sous-formule, cette fois, conjonctive. Une occurrence de sous-formule disjonctive peut se rencontrer plusieurs fois, mais son adresse doit figurer chaque fois avec un nom différent.

Il est commode, ici encore, de considérer des séquents avec bénitier. Le bénitier sera vide ou rempli selon que le séquent contient l'adresse d'une formule conjonctive ou pas (ladite adresse prenant place dans le bénitier).

Les majuscules grecques Γ, Δ sont réservées pour noter des ensembles d'adresses nommées d'occurrences de sous-formules disjonctives de A. Un séquent s'écrira alors sous la forme Γ (cas où le bénitier est vide) ou $\Gamma; B$ (cas où le bénitier contient l'adresse d'une occurrence d'une certaine sous-formule conjonctive B).

Une écriture comme Γ, A, Δ suppose implicitement qu'à la place de A, c'est l'adresse d'une de ses occurrences que l'on trouve et que cette adresse est nommée avec un nom qui n'interfère pas avec les autres noms apparaissant dans Γ ou Δ, eux-mêmes ne partageant aucun de leurs noms.

Une notation explicite pour indiquer les noms est celle-ci : Γ^X, A^z, Δ^Y signifiant que X rassemble les noms des adresses des occurrences des formules de Γ, que Y rassemble ceux de Δ et que A a le nom z. Quant à la notation $[\Gamma_i]_i$, elle représente une famille de séquents.

6.2.2 Preuves

Une **preuve** est un arbre bien-fondé défini inductivement au moyen des règles d'inférence suivantes :

$$\frac{\Gamma^X, (\vee_{i\in I} A_i)^x; A_{i_0}}{\Gamma^X, (\vee_{i\in I} A_i)^x;}\ I_\vee \qquad (i_0 \in I)$$

$$\frac{[\Gamma^X, A_j^z;]_{j\in J}}{\Gamma^X; \wedge_{j\in J} A_j}\ I_\wedge$$

$$\frac{\Gamma_1^{X_1}, \Delta^{X_0}; A \quad \Gamma_2^{X_2'}, \Delta^{X_0}, A^x;}{\Gamma_1^{X_1}, \Gamma_2^{X_2}, \Delta^{X_0};}\ \mathit{Coupe} \qquad (X_2 = \sigma(X_2'))$$

Notons qu'un cas particulier de la règle $I_\wedge$ est la règle suivante :

$$\overline{\Gamma; \mathbf{1}}$$

ce qui assure l'existence effective de preuves (i.e. d'arbres bien-fondés).

Les règles $I_\vee$ et $I_\wedge$ sont des règles d'introduction et la règle *Coupe* une règle de coupure. Si p est une preuve, on note $|p|$ son séquent conclusion.

Remarques : 1) Comme signalé au chapitre 1, la présence d'un contexte Δ partagé par les deux prémisses et de contextes Γ_1 et Γ_2 non partagés permet d'éviter le recours à des règles de contraction ou d'affaiblissement au cours du processus d'élimination des coupures.

2) Pour la règle $I_\wedge$, bien que les A_j soient des formules a priori distinctes, on leur donne, par commodité, dans chaque séquent conclusion des prémisses, le même nom z.

3) Pour la règle *Coupe*, l'ensemble X_2' des noms utilisés pour Γ_2 dans le séquent conclusion de la prémisse de droite est intentionnellement supposé différent de l'ensemble X_2 des noms utilisés pour Γ_2 dans le séquent conclusion de la coupure (ceci pour des raisons qui apparaissent au moment d'éliminer les coupures). On associe alors à la coupure une fonction de renommage, disons σ, de X_2' vers X_2.

Remarquons aussi que la contrainte du bénitier impose que l'inférence de tête de la prémisse de la règle $I_\vee$ soit une règle $I_\wedge$ introduisant la formule A_{i_0}. On rencontre donc toujours la règle $I_\vee$ dans cette configuration :

$$\dfrac{\dfrac{[\Gamma, (\vee_{i\in I} \wedge_{j\in J} A_{ij})^x, (A_{i_0 j})^z;]_{j\in J}}{\Gamma, (\vee_{i\in I} \wedge_{j\in J} A_{ij})^x; \wedge_{j\in J} A_{ij}}\, I_\wedge}{\Gamma, (\vee_{i\in I} \wedge_{j\in J} A_{ij})^x;}\, I_\vee \qquad (i_0 \in I)$$

De même, on rencontrera toujours la règle de coupure dans cette configuration :

$$\dfrac{\dfrac{\left[\Gamma_1^{X_1}, \Delta^{X_0}, (A_j)^z;\right]_{j\in J}}{\Gamma_1^{X_1}, \Delta^{X_0}; \wedge_{j\in J} A_j}\, I_\wedge \qquad \Gamma_2^{X_2'}, \Delta^{X_0}, A^x;}{\Gamma_1^{X_1}, \Gamma_2^{X_2}, \Delta^{X_0};}\, Coupe$$

Dans la suite, nous simplifierons les notations en laissant tomber l'information des ensembles parcourus par les indices et des noms utilisés dans les séquents. En revanche, l'information des noms intervient dans la notation des preuves par des termes.

6.2.3 Notation des preuves par des termes

Nous proposons une notation alternative des preuves sous la forme de termes.

Dans le cas de la règle $I_\vee$, si la preuve du séquent $\Gamma, (\vee_i A_i)^x; A_{i_0}$ est p_0 alors la preuve de $\Gamma, (\vee_i A_i)^x$ est notée :

$$!(x, i_0)p_0$$

Dans le cas de la règle $I_\wedge$, si les preuves des $\Gamma, (A_j)^z$ sont les p_j, alors la preuve de $\Gamma; \wedge_j A_j$ est notée :

$$?j \overset{z}{\mapsto} p_j$$

Dans le cas de la règle *Coupe*, si on pose $X = X_1 \cup X_2 \cup X_0$ tandis que les preuves de $\Gamma_1^{X_1}, \Delta^{X_0}; \wedge_j A_j$ et de $\Gamma_2,^{X_2'} \Delta^{X_0}, (\vee_j A_j^\perp)^x$ sont respectivement p et q alors, la preuve de $\Gamma_1^{X_1}, \Gamma_2^{X_2}, \Delta^{X_0}$ est notée :

$$\mathrm{Coupe}_{(x,X,\sigma)}(p; q)$$

La donnée du séquent conclusion d'une preuve et de sa notation comme un terme permet de retrouver les séquents prouvés à chaque étape. Dans la suite, on considèrera que le séquent prouvé par une preuve notée comme un terme est à chaque instant connu, sans se soucier de savoir comment il est connu.

La donnée d'un nom x et d'un indice i_0, écrite sous la forme x, i_0 est appelée $\vee$-**coup**. Si p est une preuve de la forme $!(x, i_0)p_0$ alors x, i_0 est appellé $\vee$-**coup** de p et noté $C(p)$. Si x est le nom d'une adresse u, alors on pose $\mathcal{O}cc(x, i_0) = ui_0$.

6.2.4 Preuves de Novikoff

Un séquent est **avec redondance** s'il contient deux fois la même occurrence d'une formule, les adresses étant bien sûr indexées chaque fois d'un nom différent. Dans le cas contraire, le séquent est dit **sans redondance**. Une preuve est dite **sans redondance** s'il n'y intervient que des séquents sans redondance. Une **preuve de Novikoff** est une preuve sans coupure et sans redondance. Autrement dit, une preuve de Novikoff est construite à partir des règles suivantes :

$$\frac{\Gamma, \vee_{i \neq i_0} A_i ; A_{i_0}}{\Gamma, \vee_i A_i ;} \; I'_\vee$$

et

$$\frac{[\Gamma, A_j ;]_j}{\Gamma ; \wedge_j A_j} \; I_\wedge$$

et on retrouve la notion de prouvabilité implicite à la notion de régularité de Novikoff.
Remarque : 1) L'interdiction de redondance n'enlève rien à la prouvabilité. De fait, la règle suivante est admissible :

$$\frac{\Gamma, (\vee_i A_i)^x, (\vee_i A_i)^y ;}{\Gamma, (\vee_i A_i)^x ;} \; Cont$$

La démonstration d'admissibilité est par induction sur la preuve de $\Gamma, (\vee_i A_i)^x, (\vee_i A_i)^y$ supposée elle-même sans redondance. Le cas clé est quand $\Gamma, (\vee_i A_i)^x, (\vee_i A_i)^y;$ provient de $\Gamma, (\vee_i A_i)^x, (\vee_i A_i)^y ; A_{i_0}$ par une règle $I_\vee$ appliquée à la formule de nom y. Par induction, on a l'existence d'une preuve de $\Gamma, (\vee_i A_i)^x ; A_{i_0}$ et il suffit de réappliquer la règle $I_\vee$, cette fois avec le nom x.

2) Notre définition est plus faible que celle de Novikoff. De fait, chez Novikoff, on peut faire intervenir des variables propositionnelles dans les formules et on a, en plus, des axiomes du style $\Gamma, A^\perp, A$.

3) Les preuves de Novikoff ne sont pas stables par élimination des coupures, des redondances pouvant y survenir.

6.2.5 Preuves partielles

Dans le but de pouvoir étudier une version épurée de la coupure, à savoir :

$$\frac{;A \quad A^\perp ;}{} \; Coupe$$

nous considérons aussi des preuves partiellement bien définies. A cette fin, nous ajoutons la règle d'inférence suivante à la définition de preuve :

$$\frac{}{\Gamma} \; \Omega$$

quelque soit Γ, la notation sous forme de terme d'une telle preuve étant Ω.

6.3 Interprétation en terme de jeux

6.3.1 Parties

On définit ci-dessous un jeu entre deux joueurs, le premier étant appelé proposant et le second opposant. Les joueurs se disputent la validité d'une certaine formule, disons A, et leurs coups s'alternent. Un coup du proposant (resp opposant) consiste en l'affirmation d'une sous-formule conjonctive de A (resp $A^\perp$) qui est en même temps une attaque d'une sous-formule de $A^\perp$ (resp A) précédemment affirmée par l'opposant (resp proposant). La formule attaquante doit être une sous-formule de la duale de la formule attaquée. Une partie est une suite finie ou infinie de coups (sous-entendu de coups permis) dont le coup initial dépend de la nature de A. Si A est disjonctive, le coup initial est une affirmation de $A^\perp$ par l'opposant. Sinon, c'est l'affirmation, toujours par l'opposant, d'une sous-formule conjonctive directe de $A^\perp$. On représente un coup par la donnée (f, u) d'un entier naturel f et d'une adresse u dans A (ce sont les mêmes adresses que dans $A^\perp$). L'adresse u désigne l'occurrence d'une sous-formule de A et l'entier f est censé désigner l'indice du coup duquel u est une attaque. Ainsi, si le coup d'indice f était (f', u'), alors u désigne une sous-formule de la formule d'adresse u', i.e. u est une extension directe de u'. Puisque le coup initial affirme $A^\perp$, il a la forme $(f, <>)$ et puisqu'il n'attaque aucun coup précédent, on peut se permettre de poser arbitrairement $f = 0$.

En résumé :

Un **J-coup** pour A est la donnée (f, u) d'un entier naturel f et d'une occurrence u dans A.

Une **partie** π pour A est une suite non vide finie ou infinie de J-coups $(f_0, u_0), ..., (f_n, u_n), ...$ telle que $f_0 = 0$, $u_0 =<>$ et, pour tout $n > 0$, $f_n < n$ et u_n est une extension directe de u_{f_n}. Si π est la partie finie $(f_0, u_0), ..., (f_n, u_n)$, alors, pour tout $m < n$, $\pi|_m$ désigne la partie $(f_0, u_0), ..., (f_m, u_m)$.

Un type particulier de partie sont les E-parties. Pour les E-parties sur A, on a une bijection entre les stratégies gagnantes du proposant et les preuves de Novikoff de A.

Une E-partie est une partie $(f_0, u_0), ..., (f_n, u_n), ...$ telle que $f_n = n - 1$ pour n pair. Autrement dit, une E-partie est une partie où l'opposant répond systématiquement au coup précédent du proposant. De plus, il est défendu au proposant de rejouer deux fois la même formule ré-attaquant le même coup précédent de l'opposant.

Une E-partie est gagnante pour le proposant si l'opposant ne peut plus jouer, c'est-à-dire si le dernier coup du proposant affirme la formule **1**.

6.3.2 Stratégies

On définit dans cette section, les stratégies du proposant pour les E-parties. Une telle stratégie peut être définie inductivement par la donnée de l'ensemble des suites de coups joués par l'opposant au fur et à mesure que le proposant joue les coups de sa stratégie. On appelle position les suites de coups de l'opposant. Notons que pour une E-partie, l'opposant répond toujours au coup précédent. On peut donc se dispenser de l'indice f et ne garder que la composante u des coups (f, u). Précisons aussi que puisque les formules affirmées par l'opposant sont conjonctives dans $A^\perp$, alors, elles sont disjonctives dans A.

Soit A une formule.

Une **position** sur A est une suite non vide $u_1...u_n$ d'occurrences de sous-formules conjonctives de $A^\perp$ (i.e. disjonctives de A) telle que :

- si A est disjonctive, $<>$ est une **position** (de longueur 1)
- si $A = \wedge_{i \in I} A_i$, pour chaque $i \in I$, i est une **position** (de longueur 1)
- $u_1...u_{n+1}$ est une **position** si $u_1...u_n$ est une position, et s'il existe un entier $m \leq n$ tel que u_{n+1} s'écrive $u_m ij$, mais qu'aucun n'autre $u_{m'}$ ne s'écrive $u_m ij'$ avec le même i

Remarque : La condition qu'aucun autre $u_{m'}$ ne s'écrive $u_m ij'$ avec le même i correspond à la condition que le proposant n'a pas le droit de rejouer deux fois le même coup. Une conséquence est que les $u_{m'}$ sont distincts les uns des autres, et en particulier que u_m est unique vérifiant $u_{n+1} = u_m ij$.

Une **stratégie** (sous-entendu du proposant) pour A est une fonction ϕ définie sur un ensemble $\mathrm{Dom}(\phi)$ de positions et à valeurs dans l'ensemble des occurrences de sous-formules conjonctives de A. Une stratégie doit satisfaire en outre ces trois propriétés :

1. $\mathrm{Dom}(\phi)$ contient les positions de longueur 1
2. si $\phi(u_1...u_n) = v$ fait référence à la sous-formule $\wedge_i A_i$, alors, pour tout i, posant $u_{n+1} = vi$, on a $u_1...u_{n+1} \in \mathrm{Dom}(\phi)$
3. si $u_1...u_{n+1} \in \mathrm{Dom}(\phi)$ alors $u_1...u_n \in \mathrm{Dom}(\phi)$, u_{n+1} est une extension directe de $v = \phi(u_1...u_n)$ et v est une extension directe de l'un des u_m

Une stratégie ϕ est **gagnante** en $u_1...u_n \in \mathrm{Dom}(\phi)$ si, $v = \phi(u_1...u_n)$ faisant référence à la sous-formule $\wedge_i A_i$, pour tout $i \in I$, posant $u_{n+1} = vi$, ϕ est gagnante en $u_1...u_{n+1}$.

En particulier, si $\phi(u_1...u_n)$ fait référence à $\mathbf{1}$ alors ϕ est gagnante en $u_1...u_n$, conformément à la définition de partie gagnante pour le proposant.

Une stratégie ϕ est **gagnante** pour A si elle est gagnante en toute position de longueur 1.

Remarque : Une stratégie pour une formule conjonctive $\wedge_i A_i$ est gagnante si elle est gagnante pour chaque A_i.

6.3.3 Equivalence entre stratégies gagnantes et preuves de Novikoff

Il y a une bijection directe entre preuves de Novikoff de A et stratégies gagnantes du proposant pour A. Nous le prouvons par un argument similaire à celui développé au chapitre 5 à propos des E-dialogues.

Soit p une preuve de Novikoff de A. L'ensemble des occurrences de p vu comme un arbre a la structure d'un ensemble de positions. Par induction sur la taille de ces occurrences, on associe à chacune de ces occurrences une position. Par construction, les positions sont toutes distinctes.

- on associe la position $<>$ à p en tant que sous-preuve d'elle-même ($<>$ est une position de longueur 1)
- si $A = \wedge_i A_i$, et $p = ?i \mapsto p_i$, alors on associe la position i à chacun des p_i
- si la position associée à la sous-preuve q est $u_1...u_n$, si $q = !(x, i_0)?j \mapsto q_j$ et si $\mathcal{O}cc(x, i_0) = v$ alors, posant $u = vj$, on associe à q_j la position $u_1...u_n u$

L'absence de redondance implique que les suites $u_1...u_n$ sont effectivement des positions et on définit le domaine $\mathrm{Dom}(\phi)$ de la stratégie ϕ associée à p comme l'ensemble des positions associées aux sous-preuves de p. Maintenant, si la sous-preuve de p correspondant à la position $u_1...u_n \in \mathrm{Dom}(\phi)$ a la forme $!(x, i_0)?j \mapsto q_j$ alors on pose $\phi(u_1...u_n) = \mathcal{O}cc(x, i_0)$. Il est immédiat de vérifier que ϕ satisfait les trois propriétés qu'une stratégie doit satisfaire.

Pour la réciproque, une étape préliminaire est de nommer chaque occurrence de sous-formule de A. Ensuite, à toute position $u_1...u_n$ on associe un séquent $\Gamma(u_1...u_n)$ constitué des occurrences u_1, ..., u_n, chacune avec le nom qui lui est propre. La propriété que tous les u_m soient distincts entre eux implique que ce séquent est sans redondance.

Maintenant, à toute position $u_1...u_n$, on peut associer une preuve de Novikoff de $\Gamma(u_1...u_n)$.

Soit donc $u_1...u_n$ une position telle que $\phi(u_1...u_n) = u_m i_0$. Supposons que u_m ait le nom x dans $\Gamma(u_1...u_n)$, que $u_m i_0$ désigne la sous-formule $\wedge_j B_j$ et que, pour tout $j \in J$, posant $u_{n+1} = u_m i_0 j$, on ait associé à $u_1...u_{n+1}$ une preuve q_j de $\Gamma(u_1...u_{n+1})$. Alors, par induction bien-fondée sur la structure de $\mathrm{Dom}(\phi)$, on peut associer à $u_1...u_n$ la preuve $!(x, i_0)?j \mapsto q_j$ qui est une preuve de Novikoff de $\Gamma(u_1...u_n)$.

Comme dans le cas des E-dialogues du chapitre 5, ces deux traductions sont réciproques l'une de l'autre et constituent dont une correspondance bijective.

6.3.4 Stratégies partielles

Les preuves partielles sont associées à des stratégies partielles.

Si on retire la condition 1 de la définition de stratégie, on obtient la définition de **stratégie partielle**.

Une stratégie partielle ϕ est **non-perdante** en $u_1...u_n$ soit parce que $u_1...u_n \notin \mathrm{Dom}(\phi)$ soit, au cas où $u_1...u_n \in \mathrm{Dom}(\phi)$, parce que pour tout $i \in I$, elle est non-perdante en $u_1...u_{n+1}$, où l'on a posé $u_{n+1} = vi$, v étant l'occurrence de la sous-formule $\wedge_{i \in I} A_i$.

La correspondance entre preuves de Novikoff et stratégies gagnantes s'étend au cas des preuves partielles de Novikoff et des stratégies partielles et non-perdantes.

6.3.5 Débat

Soit ϕ une stratégie partielle non-perdante du proposant pour un jeu sur $A = \vee_i A_i^\perp$ et τ une stratégie partielle non-perdante du proposant pour un jeu sur $A^\perp = \wedge_i A_i$.

On va définir une partie obtenue en faisant interagir entre eux les proposants des jeux pour A et pour $A^\perp$. Cette partie n'est plus une E-partie.

Les définitions suivantes proviennent, à peu de choses près, de Coquand [9].

A toute partie finie, on associe une position courante. La **position courante** l_n d'une partie finie $\pi = (f_0, u_0), ..., (f_n, u_n)$ est définie par induction bien-fondée à partir de (f_n, u_n) et des positions courantes l_i des sous-parties $\pi|_i$ pour $i < n$.

- $l_0 =<>$ (position restreinte à la seule occurrence $<>$)
- si $f_n = 0$ alors $l_n = u_n$
- si $l_{f_n - 1} = u_{n_1}...u_{n_k}$ alors $l_n = u_{n_1}...u_{n_k}u_n$

Remarques : 1) Les entiers impairs correspondent aux coups de ϕ et les entiers pairs aux coups de τ. L'entier f_n est l'index du coup auquel répond le $n^{\text{ième}}$ coup. Ainsi, f_n et n sont de parités distinctes.

2) Si l_n est la position courante de la partie $(f_0, u_0), ..., (f_n, u_n)$ alors, on peut retrouver par induction d'où "provient" chaque occurrence de la position. Ainsi, une position courante peut toujours s'écrire sous la forme $l_n = u_{m_1}...u_{m_n}$.

Le **débat** entre ϕ et τ est une partie $(f_0, u_0), ..., (u_n, f_n), ...$ définie récursivement à partir du calcul des positions courantes successives. Pour $n \geq 0$, on considère $l_n = u_{m_0}...u_{m_n}$ la position courante associée à la partie finie $(f_0, u_0), ..., (u_n, f_n)$. Si n est pair, on pose $u_{n+1} = \phi(u_{m_1}...u_{m_n})$, si n est impair, on pose $u_{n+1} = \tau(u_{m_1}...u_{m_n})$. Dans tous les cas, u_{n+1} est une extension directe d'un unique u_{m_i} et on pose $f_{n+1} = m_i$.

Proposition 6 *Le débat entre ϕ et τ est fini, c'est-à-dire que, pour un certain n, $\phi(l_n)$ ou $\tau(l_n)$ n'est plus défini.*

On trouvera la preuve dans Coquand [9].

6.4 Elimination faible de tête des coupures

L'élimination faible de tête des coupures est une procédure de réduction itérée de la coupure de tête entre deux preuves, lorsque celle-ci existe, jusqu'à ce que la coupure laisse la place en tête à une règle d'introduction.

Avant de décrire cette procédure, on donne une liste de règle de réduction permettant de transformer les configurations ayant une coupure comme règle principale en d'autres configurations plus petite relativement à une certaine mesure bien choisie.

6.4.1 Réduction de tête élémentaire

La réduction de tête élémentaire consiste à réduire une coupure de tête en une ou plusieurs coupures plus petites relativement à une certaine mesure bien choisie.

On envisage différents cas selon l'inférence de tête de la prémisse se trouvant sur le côté droit de la coupure. On ne considère pas le cas où l'inférence de tête en question est une coupure.

T1 La règle d'introduction en tête de la prémisse de droite "joue" dans la formule de coupure (on pose $A_{i_0}^\perp = \wedge_j B_j^\perp$ et $\sigma(X_2') = X_2$).

$$\dfrac{\dfrac{\left[\begin{array}{c}\vdots\ p_i\\ \Delta^X,\Gamma_1^{X_1},A_i^y;\end{array}\right]_i}{\Delta^X,\Gamma_1^{X_1};\wedge_i A_i}\,I_\wedge \qquad \dfrac{\dfrac{\left[\begin{array}{c}\vdots\ q_j\\ \Delta^X,\Gamma_2^{X_2'},(\vee_i A_i^\perp)^x,(B_j^\perp)^z;\end{array}\right]_j}{\Delta^X,\Gamma_2^{X_2'},(\vee_i A_i^\perp)^x;\wedge_j B_j^\perp}\,I_\wedge}{\Delta^X,\Gamma_2^{X_2'},(\vee_i A_i^\perp)^x;}\,I_\vee}{\Delta^X,\Gamma_1^{X_1},\Gamma_2^{X_2};}\,Coupe$$

se réduit en

$$\dfrac{\dfrac{\left[\dfrac{\dfrac{\left[\begin{array}{c}\vdots\ p_i\\ \Delta^X,\Gamma_1^{X_1},A_i^y;\end{array}\right]_i}{\Delta^X,\Gamma_1^{X_1};\wedge_i A_i}\,I_\wedge \qquad \begin{array}{c}\vdots\ q_j\\ \Delta^X,\Gamma_2^{X_2'},(\vee_i A_i^\perp)^x,(B_j^\perp)^z;\end{array}}{\Delta^X,\Gamma_1^{X_1},\Gamma_2^{X_2},(B_j^\perp)^z;}\,Coupe\right]_j}{\Delta^X,\Gamma_1^{X_1},\Gamma_2^{X_2};\wedge_j B_j^\perp}\,I_\wedge \qquad \begin{array}{c}\vdots\ p_{i_0}\\ \Delta^X,\Gamma_1^{X_1},A_{i_0}^y;\end{array}}{\Delta^X,\Gamma_1^{X_1},\Gamma_2^{X_2};}\,Coupe$$

T2 La règle d'introduction en tête de la prémisse de droite "joue" dans une formule autre que la formule de coupure (on pose $B_{j_0}=\wedge_k C_k$ et $\sigma(X_2')=X_2$).

$$\dfrac{\dfrac{\left[\begin{array}{c}\vdots\ p_i\\ \Delta^X,\Gamma_1^{X_1},A_i^y;\end{array}\right]_i}{\Delta^X,\Gamma_1^{X_1};\wedge_i A_i}\,I_\wedge \qquad \dfrac{\dfrac{\left[\begin{array}{c}\vdots\ q_j\\ \Delta^X,\Gamma_2^{X_2'},(\vee_i A_i^\perp)^x,(\vee_j B_j)^{x'},C_k^z;\end{array}\right]_k}{\Delta^X,\Gamma_2^{X_2'},(\vee_i A_i^\perp)^x,(\vee_j B_j)^{x'};\wedge_k C_k}\,I_\wedge}{\Delta^X,\Gamma_2^{X_2},(\vee_i A_i^\perp)^x,(\vee_j B_j)^{x'};}\,I_\vee}{\Delta^X,\Gamma_1^{X_1},\Gamma_2^{X_2},\vee_j B_j;}\,Coupe$$

se réduit en

$$\dfrac{\dfrac{\left[\dfrac{\dfrac{\left[\begin{array}{c}\vdots\ p_i\\ \Delta^X,\Gamma_1^{X_1},A_i^y;\end{array}\right]_i}{\Delta^X,\Gamma_1^{X_1};\wedge_i A_i}\,I_\wedge \qquad \begin{array}{c}\vdots\ q_j\\ \Delta^X,\Gamma_2^{X_2'},(\vee_i A_i^\perp)^x,(\vee_j B_j)^{x'},C_j;\end{array}}{\Delta^X,\Gamma_1^{X_1},\Gamma_2^{X_2},(\vee_j B_j)^{x'},C_k^z;}\,Coupe\right]_k}{\Delta^X,\Gamma_1^{X_1},\Gamma_2^{X_2},(\vee_j B_j)^{x'};\wedge_k C_k}\,I_\wedge}{\Delta^X,\Gamma_1^{X_1},\Gamma_2^{X_2},(\vee_j B_j)^{x'};}\,I_\vee$$

T3 la preuve de droite est Ω (on pose $\sigma(X_2')=X_2$).

$$\dfrac{\dfrac{\left[\begin{array}{c}\vdots\ p_i\\ \Delta^X,\Gamma_1^{X_1},A_i^y;\end{array}\right]_i}{\Delta^X,\Gamma_1^{X_1};\wedge_i A_i} \qquad \begin{array}{c}\Omega\\ \vdots\\ \Delta^X,\Gamma_2^{X_2'},(\vee_i A_i^\perp)^x;\end{array}}{\Delta^X,\Gamma_1^{X_1},\Gamma_2^{X_2};}$$

se réduit en

$$\dfrac{\Omega}{\Delta^X,\Gamma_1^{X_1},\Gamma_2^{X_2};}$$

Remarque : Pour la première règle de réduction, il y a une duplication de p_i. Supposons que dans p_i, il y ait un "coup" dans une formule de Δ, Γ_1. En appliquant maintenant la deuxième règle de réduction pour chacune des copies de p_i, ce coup peut être déplacé au delà de la coupure la plus basse. Ce coup, joué une première fois par une des copies de p_i puis une deuxième fois par l'autre copie de p_i, correspondra donc à une redondance. Et il y aura cette introduction de redondance même si les preuves avaient été sans redondance au départ. C'est pourquoi nous autorisons plusieurs occurrences de la même sous-formule dans un séquent et pourquoi nous avons recours aux noms pour distinguer entre ces diverses occurrences de la même sous-formule.

En adoptant l'écriture des preuves sous la forme de termes, et en appelant $\overset{t}{\Longrightarrow}$ la réduction ainsi définie, les règles précédentes se réécrivent de la sorte (on pose $\overline{X} = X \cup X_1 \cup X_2$) :

T1

$$\mathrm{Coupe}_{(x,\overline{X},\sigma)}(?i \overset{y}{\mapsto} p_i; !(x,i_0)?j \overset{z}{\mapsto} q_j) \overset{t}{\Longrightarrow} \mathrm{Coupe}_{(y,\overline{X},\{\})}(?j \overset{\mathcal{F}(\overline{X})}{\mapsto} \mathrm{Coupe}_{(x,\overline{X}\cup\mathcal{F}(\overline{X}),\sigma\cup\{z\to\mathcal{F}(\overline{X})\})}(?i \overset{y}{\mapsto} p_i; q_j); p_{i_0})$$

T2

$$\mathrm{Coupe}_{(x,\overline{X},\sigma)}(?i \overset{y}{\mapsto} p_i; !(x',i'_0)?j \overset{z}{\mapsto} q_j) \overset{t}{\Longrightarrow} !(\sigma(x'),i'_0)?j \overset{\mathcal{F}(\overline{X})}{\mapsto} \mathrm{Coupe}_{(x,\overline{X}\cup\{\mathcal{F}(\overline{X})\},\sigma\cup\{z\to\mathcal{F}(\overline{X})\})}(?i \overset{y}{\mapsto} p_i; q_j)$$

T3

$$\mathrm{Coupe}_{(x,\overline{X},\sigma)}(?i \overset{Z_i}{\mapsto} p_i; \Omega) \overset{t}{\Longrightarrow} \Omega$$

L'information, pour chaque coupure, des "$\overline{X}$" et "σ" sert à gérer les éventuels problèmes de confusion de nom, suite à des redondances. Il n'y a pas d'autres difficultés que celles prises en compte par ces règles, et, à l'avenir, par souci de lisibilité, nous omettrons ces informations.

6.4.2 Réduction de tête étendue

La réduction de tête étendue d'une preuve p consiste à aller chercher, à travers les coupures, la règle $I_\vee$ la plus externe et la plus à gauche de p, d'appliquer, à la bonne place, les règles 2 ou 3 de la réduction de tête élémentaire, jusqu'à ce que cette règle $I_\vee$, et la règle $I_\wedge$ qui suit, viennent en tête de p, auquel cas on s'arrête, ou bien que la règle 1 soit applicable, auquel cas on l'applique et on s'arrête.

On utilise comme intermédiaire la réduction $\overset{d}{\Longrightarrow}$ qui exprime qu'une règle d'introduction se situant sur la branche d'extrême-gauche traverse effectivement jusqu'à la tête de la preuve.

D1

$$!(x,i_0)p_0 \overset{d}{\Longrightarrow} !(x,i_0)p_0$$

D2

$$?j \overset{z}{\mapsto} p_j \overset{d}{\Longrightarrow} ?j \overset{z}{\mapsto} p_j$$

D3

$$\Omega \overset{d}{\Longrightarrow} \Omega$$

D4

$$\frac{q \overset{d}{\Longrightarrow} !(x',j_0)?k \overset{t}{\mapsto} q_k}{\mathrm{Coupe}_x(p;q) \overset{d}{\Longrightarrow} !(x',j'_0)?k \overset{t}{\mapsto} \mathrm{Coupe}_x(p;q_k)}$$

D5

$$\frac{q \overset{d}{\Longrightarrow} \Omega}{\mathrm{Coupe}_x(p;q) \overset{d}{\Longrightarrow} \Omega}$$

FE1

$$\frac{q \overset{f}{\Longrightarrow}_1 \mathrm{Coupe}_y(q';r)}{\mathrm{Coupe}_x(p;q) \overset{f}{\Longrightarrow}_1 \mathrm{Coupe}_x(p;\mathrm{Coupe}_y(q';r))}$$

FE2

$$\frac{q \overset{d}{\Longrightarrow} !(x,j_0)?k \overset{t}{\mapsto} q_k}{\mathrm{Coupe}_x(?j \overset{z}{\mapsto} p_j;q) \overset{f}{\Longrightarrow}_1 \mathrm{Coupe}_z(?k \overset{t}{\mapsto} \mathrm{Coupe}_x(?j \overset{z}{\mapsto} p_j;q_k);p_{j_0})}$$

6.4.3 La réduction faible de tête

L'élimination (ou réduction) faible de tête des coupures itère la réduction de tête étendue jusqu'à ce qu'une règle d'introduction vienne en tête.

F1

$$\frac{p \overset{d}{\Longrightarrow} r}{p \overset{f}{\Longrightarrow} r}$$

F2

$$\frac{\mathrm{Coupe}_x(p;q) \overset{f}{\Longrightarrow}_1 r \quad r \overset{f}{\Longrightarrow} s}{\mathrm{Coupe}_x(p;q) \overset{f}{\Longrightarrow} s}$$

Si pour certains p et r, on a $p \overset{f}{\Longrightarrow} r$, alors, r est sans coupure en tête, et, par induction, on a l'existence d'une suite finie $p = p_0$, p_1, ..., p_n telle que $p_i \overset{f}{\Longrightarrow}_1 p_{i+1}$ pour $i < n$ et $p_n \overset{d}{\Longrightarrow} r$.

La suite p_0, p_1, ..., p_n est appelée **trace** de la réduction faible de tête de p.

6.4.4 Terminaison de l'élimination faible de tête des coupures

Pour prouver la terminaison de l'élimination faible de tête des coupures, nous avons besoin de prouver quelque chose de plus fort : la terminaison de l'algorithme — a priori transfini — d'élimination des coupures selon la stratégie de réduction de la coupure plus externe d'abord.

La **stratégie de réduction de la coupure la plus externe d'abord** est une stratégie de réduction qui étend la réduction faible de tête sous les règles d'introduction. A partir du moment où le langage est infinitaire, ce procédé de réduction peut être transfini.

E1

$$\frac{p \overset{f}{\Longrightarrow} !(x,i_0)p_0 \qquad p' \overset{e}{\Longrightarrow} r'}{p \overset{e}{\Longrightarrow} !(x,i_0)r'}$$

E2

$$\frac{p \overset{f}{\Longrightarrow} ?j \overset{z}{\mapsto} p_j \qquad \forall j, p_j \overset{e}{\Longrightarrow} r_j}{p \overset{e}{\Longrightarrow} ?j \overset{z}{\mapsto} r_j}$$

E3

$$\frac{p \overset{f}{\Longrightarrow} \Omega}{p \overset{e}{\Longrightarrow} \Omega}$$

Lemme 6 *Soient p' et q' des preuves partielles et sans coupures respectivement du séquent $\Gamma_1, \Delta; \wedge_i A_i$ et du séquent $\Gamma_2, \Delta, \vee_i A_i^\perp$, la formule $\vee_i A_i^\perp$ étant de nom x. Alors, pour toutes preuves partielles p et q telles que $p \overset{e}{\Longrightarrow} p'$ et $q \overset{e}{\Longrightarrow} q'$, il existe une preuve partielle et sans coupure r vérifiant $\mathrm{Coupe}_x(p;q) \overset{e}{\Longrightarrow} r$.*

PREUVE : Par induction structurelle sur $\wedge_i A_i$, puis, par induction structurelle sur q', et enfin, par induction sur la preuve de $q \stackrel{e}{\Longrightarrow} q'$.

Soient donc p et q des preuves partielles, p' et q' des preuves partielles et sans coupures respectivement de $\Gamma_1, \Delta; \wedge_i A_i$ et de $\Gamma_2, \Delta, \vee_i A_i^\perp$, telles que $p \stackrel{e}{\Longrightarrow} p'$ et $q \stackrel{e}{\Longrightarrow} q'$.

Du fait que $\wedge_i A_i$ est conjonctif, p et p' s'écrivent respectivement $?i \stackrel{y}{\mapsto} p_i$ et $?i \stackrel{y}{\mapsto} p'_i$ et, de par la définition de $\stackrel{e}{\Longrightarrow}$, on a $p_i \stackrel{e}{\Longrightarrow} p'_i$.

La preuve q' est sans coupure et prouve un séquent sans formule conjonctive. Ou bien q' est Ω ou bien elle a la forme $!(x', i'_0)q'_0$ avec $q'_0 = ?j \stackrel{z}{\mapsto} q'_j$.

Dans le premier cas, on en déduit que $q \stackrel{f}{\Longrightarrow} \Omega$, puis $\mathrm{Coupe}_x(p;q) \stackrel{d}{\Longrightarrow} \Omega$, puis $\mathrm{Coupe}_x(p;q) \stackrel{f}{\Longrightarrow} \Omega$ et, enfin, $\mathrm{Coupe}_x(p;q) \stackrel{e}{\Longrightarrow} \Omega$, ce qui est le résultat attendu.

Dans le second cas, de par la définition de $\stackrel{e}{\Longrightarrow}$, il existe q_0 telle que $q \stackrel{f}{\Longrightarrow} !(x, i_0)q_0$ et $q_0 \stackrel{e}{\Longrightarrow} q'_0$.

De par la définition de $\stackrel{f}{\Longrightarrow}$, plusieurs cas se présentent.

- S'il existe q'' tel que $q \stackrel{f}{\Longrightarrow}_1 q''$ et $q'' \stackrel{f}{\Longrightarrow} !(x, i_0)q_0$ alors, on a aussi $q'' \stackrel{e}{\Longrightarrow} q'$ mais de manière plus courte que pour avoir $q \stackrel{e}{\Longrightarrow} q'$. Il s'ensuit, par hypothèse d'induction, qu'il existe r tel que $\mathrm{Coupe}_x(p;q'') \stackrel{e}{\Longrightarrow} r$. La preuve sans coupure r doit avoir une forme $!(t, k_0)r_0$ et il doit exister r'_0 telle que $\mathrm{Coupe}_x(p;q'') \stackrel{f}{\Longrightarrow} !(t, k_0)r'_0$ et $r'_0 \stackrel{e}{\Longrightarrow} r_0$. Mais $q \stackrel{f}{\Longrightarrow}_1 q''$ entraine aussi

  $$\mathrm{Coupe}_x(p;q) \stackrel{f}{\Longrightarrow}_1 \mathrm{Coupe}_x(p;q'')$$

  d'où $\mathrm{Coupe}_x(p;q) \stackrel{f}{\Longrightarrow} !(t, k_0)r'_0$ puis $\mathrm{Coupe}_x(p;q) \stackrel{e}{\Longrightarrow} r$.

- Si $q \stackrel{d}{\Longrightarrow} !(x', i'_0)q_0$ et que $x \neq x'$ alors, posant $q_0 = ?j \stackrel{z}{\mapsto} q_j$, on a

  $$\mathrm{Coupe}_x(p;q) \stackrel{d}{\Longrightarrow} !(x', i'_0)?j \stackrel{z}{\mapsto} \mathrm{Coupe}_x(p;q_j)$$

  et donc $\mathrm{Coupe}_x(p;q) \stackrel{f}{\Longrightarrow} !(x', i'_0)?j \stackrel{z}{\mapsto} \mathrm{Coupe}_x(p;q_j)$. Mais $q_0 \stackrel{e}{\Longrightarrow} q'_0$ donc, pour chaque j, $q_j \stackrel{e}{\Longrightarrow} q'_j$ et les q'_j sont plus petits que les q_j. Donc, par hypothèse d'induction, on obtient l'existence de r_j telle que $\mathrm{Coupe}_x(p;q_j) \stackrel{e}{\Longrightarrow} r_j$. Il suffit alors de poser $r = !(x', i'_0)?j \stackrel{z}{\mapsto} r_j$ pour pouvoir affirmer que $\mathrm{Coupe}_x(p;q) \stackrel{e}{\Longrightarrow} r$.

- Si $q \stackrel{d}{\Longrightarrow} !(x', i'_0)q_0$ avec $x = x'$ et que $q_0 = ?j \stackrel{z}{\mapsto} q_j$ alors on a $\mathrm{Coupe}_y(p;q) \stackrel{f}{\Longrightarrow}_1 \mathrm{Coupe}_x(?j \stackrel{z}{\mapsto} \mathrm{Coupe}_x(p;q_j); p_{i_0})$. Mais, puisque les q_j sont plus petits que q et que $q_0 \stackrel{e}{\Longrightarrow} q'_0$ entraine $q_j \stackrel{e}{\Longrightarrow} q'_j$ avec q'_j sans coupure, on obtient, par hypothèse d'induction, l'existence de r_j tel que $\mathrm{Coupe}_x(p;q_j) \stackrel{e}{\Longrightarrow} r_j$.

  En appliquant l'hypothèse d'induction pour $?j \stackrel{z}{\mapsto} \mathrm{Coupe}_z(p;q_j)$ et $?j \stackrel{z}{\mapsto} r_j$, et pour p_{i_0} et p'_{i_0}, puisque la formule de coupure, maintenant A_{i_0}, est plus petite, on obtient l'existence de r tel que $\mathrm{Coupe}_y(?j \stackrel{z}{\mapsto} \mathrm{Coupe}_z(p;q_j); p_{i_0}) \stackrel{e}{\Longrightarrow} r$.

■

Un corollaire immédiat s'obtient en prenant pour p et q des preuves sans coupure.

Proposition 7 *Si p et q sont des preuves partielles et sans coupure respectivement de $\Gamma_1, \Delta; \wedge_i A_i$ et de $\Gamma_2, \Delta, \vee_i A_i^\perp$, alors, il existe r partiel et sans coupure tel que* $\mathrm{Coupe}(p;q) \stackrel{e}{\Longrightarrow} r$.

Corollaire 2 *Si p et q sont des preuves partielles et sans coupures respectivement de $\Gamma_1, \Delta; \wedge_i A_i$ et de $\Gamma_2, \Delta, \vee_i A_i^\perp$, alors, il existe r sans coupure en tête tel que* $\mathrm{Coupe}(p;q) \stackrel{f}{\Longrightarrow} r$. *Autrement dit l'élimination faible de tête de* $\mathrm{Coupe}(p;q)$ *termine en un nombre d'étapes fini.*

PREUVE : De par la définition de $\stackrel{e}{\Longrightarrow}$. ■

On peut aussi étendre le résultat à des preuves avec coupure.

Proposition 8 *Pour toute preuve partielle p, il existe une preuve partielle r sans coupure telle que $p \stackrel{e}{\Longrightarrow} r$.*

PREUVE : Par induction sur p.

Si p a la forme $?j \stackrel{z}{\mapsto} p_j$ ou $!(x, j_0)p_0$, on obtient le résultat par l'hypothèse d'induction.

Si p a la forme $\mathrm{Coupe}(p_1; p_2)$ alors, par hypothèse d'induction, on a l'existence de r_1 et r_2 sans coupure tels que $p_1 \stackrel{e}{\Longrightarrow} r_1$ et $p_2 \stackrel{e}{\Longrightarrow} r_2$. On peut donc appliquer le lemme avec r_1, r_2, p_1 et p_2, ce qui fournit r sans coupure tel que $p \stackrel{e}{\Longrightarrow} r$. ■

Corollaire 3 *Si p est une preuve partielle alors la réduction faible de tête de p termine en un nombre fini d'étapes.*

Corollaire 4 *Si p est une preuve partielle du séquent vide alors $p \stackrel{f}{\Longrightarrow} \Omega$.*

Remarques : 1) Le lemme-clé de ces preuves est à mettre à l'actif de Coquand.

2) Ces résultats, à l'exception du corollaire 4, restent vrais si l'on considère des preuves non partielles.

3) Ces résultats sont aussi transposables à d'autres procédures d'élimination des coupures. Par exemple en autorisant des contractions non seulement sur les formules disjonctives mais aussi sur les formules conjonctives, et en appliquant, par exemple, la technique dite des coupures croisées.

4) Dans un cadre sans règle infinitaire, on peut utiliser le résultat de Gonthier, Lévy et Méllies [28] pour inférer à partir de la preuve d'existence d'une forme normale (par exemple en éliminant les coupures selon une stratégie de réduction de la coupure la plus interne d'abord) l'existence d'une réduction standard normalisante, permettant de dire que l'élimination des coupures selon une stratégie de réduction de la coupure la plus externe d'abord termine.

6.5 L'équivalence

On se propose de montrer, étant donnée deux preuves partielles de Novikoff prouvant des formules duales l'une de l'autre, que la réduction faible d'une coupure entre ces preuves suit les mêmes étapes que le débat entre ces preuves vues comme stratégies partielles non-perdantes. En particulier, la réduction faible termine si et seulement si le débat termine.

Les preuves de Novikoff n'étant pas stables par élimination des coupures en raison de redondances pouvant apparaître lors de la réduction, on les considère comme des preuves "standard", i.e. avec d'éventuelles redondances, et on applique les résultats des sections précédentes sur l'élimination des coupures. [1].

Une conséquence directe du corollaire 4 est le résultat suivant :

Proposition 9 *Soient p et q des preuves partielles de Novikoff, respectivement de $;\wedge_i A_i$ et de $\vee_i A_i^{\perp}$. Alors la réduction faible de tête de $\mathrm{Coupe}(p; q)$ débouche en un nombre fini d'étape sur Ω.*

Une autre manière de réduire la coupure entre p et q et d'appliquer la procédure définie par Coquand sous le nom de débat qui consiste à laisser jouer l'une contre l'autre p et q vues comme des stratégies partielles non-perdantes. Nous montrons que les deux approches partagent les mêmes étapes de calcul.

[1] Une autre solution aurait été d'introduire une règle de contraction des redondances (si Γ, A, A alors Γ, A) appliquable à chaque étape de création potentielle d'une redondance (i.e. dans la règle de réduction R1). Cette règle, comme la règle de coupure aurait eu un aspect calculatoire et ses propres règles de réduction. Le monde des preuves de Novikoff aurait alors été stable par élimination des coupures *et* des contractions. Cette approche est celle suivie, par exemple, par Novikoff [46]. Aurait-elle évité le recours à l'outil des noms ?

6.5.1 Preuves bien agencées

On étudie ici la forme bien particulière que les preuves apparaissant dans la trace d'une réduction faible ont.

Soit p et q des preuves partielles sans coupures respectivement de $\Gamma_1, \Delta; \wedge_i A_i$ et de $\Gamma_2, \Delta, \vee_i A_i^\perp;$.

Lorsqu'on regarde les étapes successives de la réduction faible de tête de Coupe$(p;q)$, il s'avère que toutes les preuves impliquées dans la trace ont une structure non innocente. On les qualifiera naïvement de preuves "bien agencées".

- une preuve partielle sans coupure est une **preuve bien agencée**.
- si $(p_j)_j$ est une famille de preuves bien agencées et si q est une preuve bien agencée, alors Coupe$(?j \mapsto p_j; q)$ est une **preuve bien agencée**

Ainsi, une preuve bien agencée peut être vue comme un arbre dont les nœuds sont annotés par des règles de coupure et les feuilles par des preuves partielles sans coupures.

Nous associons des occurrences aux nœuds et feuilles de l'arbre. L'**occurrence** de la racine de l'arbre est notée ϵ. Si un sous-arbre Coupe$(?j \mapsto p_j; q)$ a l'occurrence w alors p_j a l'occurrence wj et q a l'occurrence $w\alpha$, où α est un symbole spécial introduit pour l'occasion. En particulier, on n'associe pas d'occurrence au sous-arbre direct gauche $?j \mapsto p_j$ de la coupure mais seulement à ses propres sous-arbres p_j.

On ordonne les occurrences de nœuds et feuilles par un ordre lexicographique noté $\prec$. Au niveau des "lettres" de l'"alphabet", on pose $i \prec_L \alpha$ quelque soit l'indice i et on n'ordonne pas les différents i entre eux. L'ordre $\prec$ est ainsi partiel. On dit aussi que w est un préfixe de w' si w s'écrit $w'w''$ pour une certaine suite de "lettres" w''.

A tout nœud d'occurrence w dans p, on associe de manière canonique une feuille $F_w(p)$, seule feuille dont l'occurrence a la forme $w\alpha^n$. Autrement dit, la feuille d'occurrence $F_w(p)$ est la feuille d'extrême-droite du sous-arbre situé au nœud d'occurrence w. En particulier, la feuille $F_\epsilon(p)$ est la feuille la plus à droite de p. Réciproquement, toute feuille s'écrit de manière unique sous la forme $F_w(p)$ pour une certaine occurrence w ne se terminant par α.

On notera $|F_w(p)|$ le séquent prouvé par la preuve sans coupure située en la feuille d'occurrence $F_w(p)$. On notera $x \in |F_w(p)|$ pour dire que x est un nom utilisé dans ce séquent. Si l'occurrence associée à x fait référence à la sous-formule $\vee_{j\in J} B_j$ alors (x,i) pour $i \in I$ est un coup possible pour la preuve située en $F_w(p)$ et on utilisera la même notation $x, i_0 \in |F_w(p)|$ pour l'exprimer.

Si $x \in |F_w(p)|$, on peut suivre la trace de x en remontant vers la racine, quitte à ce que x change de nom en traversant les coupures (de par les fonctions de renommage). Il peut arriver trois sortes de destinées à ce nom x. Ou bien il traverse l'arbre et apparaît dans le séquent prouvé par la racine de l'arbre, ou bien il est **capturé** par l'une des coupures rencontrées, ou alors, il est **gelé** par une des coupures.

On dit qu'un nom $x \in |F_w(p)|$ **apparaît** sous le nom x' à l'occurrence w' dans les cas suivants :

- $w' = F_w(p)$ et $x = x'$
- si x apparaît sous le nom x' à l'occurrence $w'\alpha$ tandis que le nœud w' a la forme Coupe$_{(z,Y,\sigma)}(?i \overset{y}{\mapsto} p_i; q)$ avec $z \neq x'$, alors x apparaît sous le nom $\sigma(x')$ à l'occurrence w'
- si x apparaît sous le nom x' à l'occurrence $w'i$ alors il apparaît sous le nom x' à l'occurrence w'

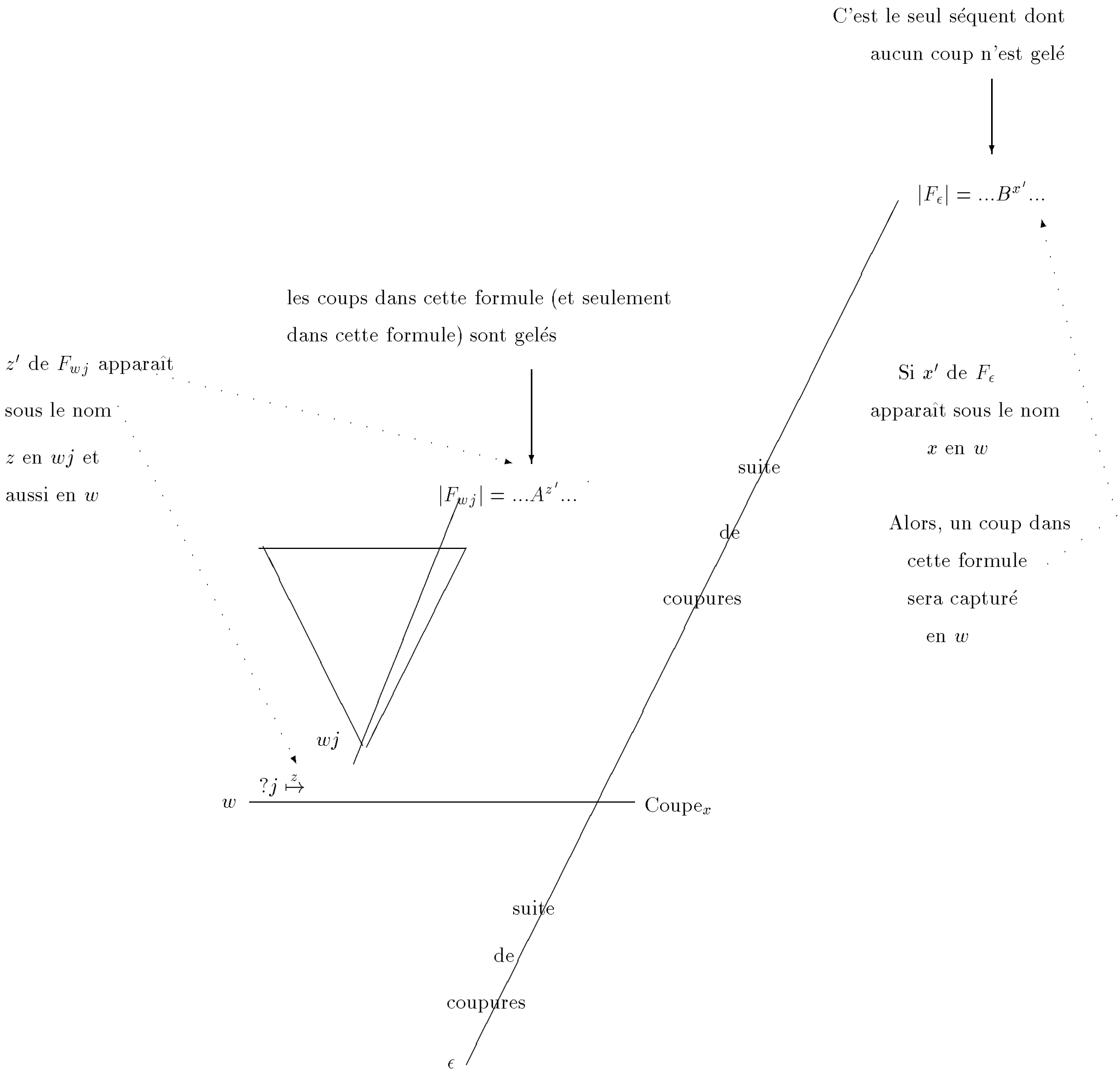
On dit qu'un $\vee$-coup $x, i_0 \in |F_w(p)|$ est **capturé** à l'occurrence w' si on a les conditions suivantes :

- x apparaît sous le nom x' à l'occurrence $w'\alpha$
- w' désigne une coupure Coupe$_{x'}(p;q)$

Remarque : En ce cas, w' est un préfixe de w.

On dit qu'un nom $y \in |F_{wi}(p)|$ ou qu'un coup $y, j_0 \in |F_{wi}(p)|$ est **gelé** si le nœud d'occurrence w a la forme Coupe$_x(?i \overset{y'}{\mapsto} p_i; q)$ et si y apparaît sous le nom y' en wi.

Voici un résumé schématique des notions sur les preuves agencées :



Remarque : Si p est une preuve bien agencée et que $p \overset{f}{\Longrightarrow}_1 q$ alors q est construite à partir de "morceaux" de p de telle sorte que q est bien agencée. On définit une fonction de projection des nœuds et feuilles de q vers les nœuds et feuilles de p.

Soit p une preuve bien agencée telle que $F_\epsilon(p) = !(x, i_0)?j \mapsto q_j$, que x, i_0 soit capturé en α^n et que $p \overset{f}{\Longrightarrow}_1 q$. A toute occurrence de nœud ou de feuille de q, à l'exception de α^n et des $F_{\alpha^n j}(q)$, on associe une occurrence dans p :

1. $\mathcal{T}(\alpha^m w) = \alpha^m w$ pour $m < n$ et w ne commençant pas par α

2. $\mathcal{T}(\alpha^n jw) = \alpha^n w$
3. $\mathcal{T}(\alpha^{n+1} w) = \alpha^n i_0 w$

Remarque : Si w a une forme telle que $F_w(q)$ soit l'occurrence d'une feuille alors $F_{\mathcal{T}(w)}(p)$ aussi.

Lemme 7 *Si $F_\epsilon(p) = !(x, i_0)?j \mapsto q_j$, que x, i_0 est capturé en α^n et que $p \overset{f}{\Longrightarrow}_1 q$, alors, on a*

- $F_w(q) = F_{\mathcal{T}(w)}(p)$ *si* $w \neq \alpha^n j$
- $F_{\alpha^n j}(q) = q_j$

PREUVE : Par construction de q à partir de p. ■

Soit $F_w(p)$ une feuille de p. Tout coup $x, i_0 \in |F_w(p)|$ est un **coup jouable** de $F_w(p)$ à la condition qu'il ne soit pas gelé. On note $\mathcal{J}_w(p)$ l'ensemble des coups jouables de $F_w(p)$.

Lemme 8 *Soit p une preuve bien agencée telle que $F_\epsilon(p) = !(x, i_0)?j \overset{z}{\mapsto} q_j$, que x, i_0 soit capturé en α^n et que $p \overset{f}{\Longrightarrow}_1 q$. Soit w une occurrence dans q telle que $F_w(q)$ ait un sens.*

1. *Si $x \in |F_{\mathcal{T}(w)}(p)|$ apparaît sous le nom x' en w' alors $x \in |F_w(q)|$ et il existe w'' tel que $x \in |F_w(q)|$ apparaît sous le nom x' en w'' avec $w' = \mathcal{T}(w'')$.*
2. *Si $x \in |F_{\mathcal{T}(w)}(p)|$ est capturé en w' alors x est un nom de $|F_w(q)|$ et il existe w'' tel que $x \in |F_w(q)|$ soit capturé en w'' avec $w' = \mathcal{T}(w'')$.*
3. *Si $x \in |F_{\mathcal{T}(wk)}(p)|$ est gelé alors x est un nom gelé de $|F_w k(q)|$.*
4. *Pour $w \neq \epsilon$ et $w \neq \alpha^n j$, si $t, k_0 \in |F_w(q)|$ alors $t, k_0 \in |F_{\mathcal{T}(w)}(p)|$.*
5. *Pour $w \neq \epsilon$ et $w \neq \alpha^n j$, si $c \in \mathcal{J}_w(q)$ alors $c \in \mathcal{J}_{\mathcal{T}(w)}(p)$. Si $c \in \mathcal{J}_{\alpha^n j}(q)$ alors $c \in \mathcal{J}_\epsilon(p)$.*
6. *Si, de plus, c, vu comme coup jouable dans p, est capturé en w', alors, il existe w'' tel que $T(w'') = w'$ et c, vu cette fois comme joup jouable dans q, est capturé en w''.*

PREUVE : Le 1 s'obtient par induction sur la preuve d'apparition, tenant compte de la manière de construire q à partir de p et en particulier de la brisure de linéarité de $\mathcal{T}$ en $\alpha^n j$ et α^{n+1}. Le 2 et le 3 s'ensuivent directement du 1. Le 4 s'obtient à partir du lemme 7.

Pour le 5, si $c \in \mathcal{J}_w(q)$ alors $c \in |F_w(q)|$ donc $c \in |F_{\mathcal{T}(w)}(p)|$. Il n'est pas gelé dans $F_w(q)$ donc, si $w \neq \alpha^n j$, pas gelé dans $F_{\mathcal{T}(w)}(p)$ par le 3, et donc jouable. Si $w = \alpha^n j$ alors, par construction, z est gelé et les coups de la forme z, k_0 ne sont pas jouables. Autrement dit les coups jouables de $F_{\alpha^n j}(q)$ sont dans $|F_\epsilon(p)|$. Mais comme aucun des coups de ce dernier n'est gelé, les coups jouables de $F_{\alpha^n j}(q)$ sont jouables dans F_ϵ.

Le 6 vient du 2. ■

6.5.2 Conformité

Dans la suite, par preuve de la trace, on sous-entend une preuve agencée de la trace de la réduction faible de la coupure entre deux preuves données de Novikoff.

Soit p une preuve de la trace et $F_w(p)$ une feuille de cette preuve. On note $P_w(p)$ la position associée à la feuille $F_w(p)$.

Soit p une preuve de la trace et $F_w(p)$ une feuille de cette preuve. Soit $\pi = (f_0, u_0), ..., (f_n, u_n)$ une partie finie de position courante $l_n = u_{m_1} ... u_{m_n}$.

On dit que p est **conforme** à π en w si les conditions suivantes sont réunies :

- $P_w(p) = l_n$

- pour tout $x, i_0 \in \mathcal{J}_w(p)$, tel que x désigne u_{m_k}, on a x capturé en un nœud d'occurrence w' et, en plus, p conforme à $\pi|_{m_k-1}, (m_k, u_{m_k} i_0)$ en $w' i_0$ (par convention, si $m_k = 0$, $\pi|_{m_k-1}$ désigne la partie vide)

Si p est conforme à π en la racine, on dit simplement que p est **conforme** à π.

Lemme 9 *Soit r_n un élément de la trace $r_0, ..., r_n, r$ de la réduction faible de* Coupe$(p; q)$. *Alors, interprétant p et q comme des stratégies partielles non perdantes, si n est pair on a $q(P_\epsilon(r_n)) = C_\epsilon(r_n)$, et si n est impair, on a $p(P_\epsilon(r_n)) = C_\epsilon(r_n)$.*

PREUVE : De par la construction de l'isomorphisme entre preuves de Novikoff et stratégies partielles non perdantes. ∎

Pour les lemmes suivants, p est une preuve de la trace telle que $F_\epsilon(p)$ ait la forme $!(x, i_0)?j \mapsto q_j$, que $C(F_\epsilon(p)) = x, i_0$ soit capturé en un nœud α^n et telle que $p \overset{f}{\Longrightarrow}_1 q$. La suite $\pi = (f_0, u_0), ..., (f_n, u_n)$ est une partie finie et $F_w(q)$ une feuille dans q telle que p soit conforme en $\mathcal{T}(w)$ à π et que x fasse référence à u_m.

Lemme 10 *Si $F_w(q) \prec \alpha^n$ alors q est conforme à π en w.*

PREUVE : Par induction sur la preuve de conformité de p en $\mathcal{T}(w)$. Puisque, par le lemme 7, $F_w(q) = F_{\mathcal{T}(w)}(p)$, on a, par conformité de p en $\mathcal{T}(w)$, $F_w(q) = l_n$. Soit maintenant $z, k_0 \in \mathcal{J}_w(q)$ tel que z fasse référence à u_f. Par conformité de p, ce coup, vu comme coup de $\mathcal{J}_{\mathcal{T}(w)}(p)$ est capturé en une occurrence w'. Par le lemme 8, il existe w'' tel que c, vu comme coup de $\mathcal{J}_w(q)$ soit capturé en w'' avec $\mathcal{T}(w'') = w'$. Or, par définition de la conformité, p est conforme en $w' k_0$ à $\pi|_{f-1}, (f, u_f k_0)$.

Puisque w'' est un préfixe de w, on a $F_{w'' k_0}(q) \prec \alpha^n$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence pour conclure que q est conforme à $\pi|_{f-1}, (f, u_f k_0)$ en $w'' k_0$.

On en déduit que q est conforme à π en w. ∎

Lemme 11 *Si $\alpha^n ji \prec F_w(q) \preceq F_{\alpha^n ji}(q)$ pour un certain i et un certain j, alors q est conforme à π aussi en w.*

PREUVE : La preuve est identique sauf que maintenant, soit $F_{w'' k_0}(q) \prec \alpha^n$ auquel cas le lemme précédent s'applique pour donner que q est conforme à $\pi|_{f-1}, (f, u_f k_0)$ en $w'' k_0$, soit $\alpha^n ji \prec F_{w'' k_0}(q)$ auquel cas, par induction, on a aussi q conforme à $\pi|_{f-1}, (f, u_f k_0)$ en $w'' k_0$.

On en déduit que q est conforme à π en w. ∎

Lemme 12 *Si $F_{\alpha^n ji}(q) \prec F_w(q) \preceq F_{\alpha^n j}$ pour tout i et un certain j, alors q est conforme à π en w.*

PREUVE : La preuve est aussi identique sauf que maintenant, ou bien $F_{w'' k_0}(q) \prec \alpha^n$ auquel cas le lemme 10 s'applique, ou bien $w'' = \alpha^n j k_0$ (i.e. "k" est un "i"), auquel cas le lemme 11 s'applique, ou alors $F_{\alpha^n ji}(q) \prec F_{w'' k_0}(q) \preceq F_{\alpha^n j}$ auquel cas, par induction, q est conforme à $\pi|_{f-1}, (f, u_f k_0)$ en $w'' k_0$.

On en déduit que q est conforme à π en w. ∎

Lemme 13 *Si $w = \alpha^n j$ pour un certain j, alors q est conforme à $\pi, (m, u_m)$ en w.*

PREUVE : La preuve est identique à celle du lemme 12 sauf qu'on n'a pas $F_w(q) = F_{\mathcal{T}(w)}(p)$ mais $F_w(q) = q_j$. Mais la position de q_j est précisément $\pi, (m, u_m)$ d'où le résultat. ∎

Lemme 14 *Si $F_{\alpha^n j}(q) \prec F_w(q) \prec F_\epsilon$ pour tout j, alors q est conforme à π en w.*

PREUVE : Maintenant, ou bien $F_{w'' k_0}(q) \prec \alpha^n$ auquel cas le lemme 10 s'applique, ou bien $F_{\alpha^n j}(q) \prec F_{w'' k_0}(q) \prec F_\epsilon$ auquel cas, par induction, q est conforme à $\pi|_{f-1}, (f, u_f k_0)$ en $w'' k_0$.

Le cas $w'' = \alpha^n$ n'est pas possible car $\mathcal{T}(w'') = w'$ et w'' n'est pas dans le domaine de définition de $\mathcal{T}$. On en déduit que q est conforme à π en w. ∎

Proposition 10 *Soit p une preuve de la trace conforme à une partie $\pi = (f_0, u_0), ..., (f_n, u_n)$. On suppose que $C(F_\epsilon(p)) = (x, i_0)$, que x désigne u_f et que $p \overset{f}{\Longrightarrow}_1 q$. Alors q est conforme à $\pi, (f, u_f i_0)$.*

PREUVE : On désigne par w le nœud en lequel le coup x, i_0 est capturé. Par la conformité de p, on sait que $P_{wi_0}(p) = l_{f-1}(u_f i_0)$. Or $P_\epsilon(q) = P_{wi_0}(p)$ tandis que $l_{n+1} = l_{f-1}(u_f i_0)$. On a donc $P_\epsilon(q) = l_{n+1}$.

Soit maintenant z, k_0 un coup jouable de $F_\epsilon(q)$. Il y a deux cas à considérer.

La première hypothèse est que z, k_0 était déjà jouable dans $P_{wi_0}(p)$, c'est-à-dire que z ne désigne pas $u_f i_0$ mais un certain u_m. En ce cas, par conformité de p, ce nom z est capturé en un nœud w'. Par le lemme 8, il existe donc w'' tel que $\mathcal{T}(w'') = w'$ et $z \in |F_\epsilon(q)|$ est capturé en w''. Puisque w'' est un préfixe de $F_\epsilon(q)$, il est constitué uniquement de α et donc, $w''k_0$ rentre dans l'une des catégorie des lemmes 10 ou 13. On a donc la conformité de q à $\pi|_{m-1}, (m, u_m)$ en $w''k_0$.

Dans le second cas, z est le nom de $u_f i_0$ et était gelé dans $P_{wi_0}(p)$. C'est donc w qui capture le coup z, k_0. D'autre part ce $\vee$-coup correspond au J-coup $(n+1, u_f i_0 k_0)$ et il s'agit de montrer que q est conforme à $\pi, (n+1, u_f i_0 k_0)$ en wk_0. Or, par le lemme 13 (le "k_0" est en fait un j), on obtient que q est conforme à π en wk_0.

Pour tous les coups jouables, on obtient la conformité de q en l'endroit de capture. On en déduit la conformité de q à π. ■

Théorème 3 (Correspondance entre réduction faible et débat)
Soient p et q des preuves partielles de Novikoff respectivement de $;\wedge_i A_i$ et de $\vee_i A_i^\perp$. Si $r_0, ..., r_n, r$ est la trace de Coupe$(p;q)$ $\stackrel{f}{\Longrightarrow}$ *r et si $(f_0, u_0), ..., (f_{n'}, u_{n'})$ est le débat entre p et q, vus comme des stratégies partielles non perdantes, alors, pour tout $m \leq n$, $C(F_\epsilon(r_m))$ est défini si et seulement si u_m est défini et, lorsque définis, $\mathcal{O}cc(C(F_\epsilon(r_m))) = u_m$. En particulier $n = n'$.*

PREUVE : Parce que Coupe$(p;q)$ est conforme à <> et par la proposition 10. ■

Remarque : On obtient par ce résultat, conjointement au résultat de terminaison de l'élimination faible de tête des coupures, une preuve de terminaison du débat. Cette preuve diffère de la première preuve de Coquand (dans la première version de [9]) en ce qu'elle est constructive et repose sur la bonne fondaison des formules. La preuve de Coquand, en revanche, utilise un argument de logique classique mais fonctionne aussi avec des formules non bien fondées.